BLC: BL Defined Using Compatible Reduction
CPSC 509: Programming Language Principles

Ronald Garcia*

14 October 2015

Syntax

$$t \in \textsc{Term}, \quad b \in \mathbb{B}, \quad x \in \textsc{Var},$$
$$t ::= \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \mid \mathsf{if}\ t\ \mathsf{then}\ t\ \mathsf{else}\ t \mid x \mid \mathsf{let}\ x = t\ \mathsf{in}\ t$$
$$b ::= \mathsf{true} \mid \mathsf{false}$$

Semantics

$$v \in \textsc{Value}, \quad r \in \textsc{Redex}, \quad C \in \textsc{Ctxt}, \quad p \in \textsc{Pgm} = \{\, t \in \textsc{Term} \mid FV(t) = \emptyset \,\}, \quad o \in \textsc{Obs} = \mathbb{B}$$
$$v ::= b \mid x$$
$$C ::= \square \mid C[\mathsf{if}\ \square\ \mathsf{then}\ t\ \mathsf{else}\ t] \mid C[\mathsf{let}\ x = \square\ \mathsf{in}\ t]$$
$$\mid\ C[\mathsf{if}\ t\ \mathsf{then}\ \square\ \mathsf{else}\ t] \mid C[\mathsf{if}\ t\ \mathsf{then}\ t\ \mathsf{else}\ \square] \mid C[\mathsf{let}\ x = t\ \mathsf{in}\ \square]$$
$$r ::= \mathsf{if}\ v\ \mathsf{then}\ t\ \mathsf{else}\ t \mid \mathsf{let}\ x = v\ \mathsf{in}\ t$$

Free Variables

$FV : \textsc{Term} \to \mathcal{P}(\textsc{Var})$

$$FV(b) = \emptyset$$
$$FV(\mathsf{if}\ t_1\ \mathsf{then}\ t_2\ \mathsf{else}\ t_3) = FV(t_1) \cup FV(t_2) \cup FV(t_3)$$
$$FV(x) = \{\, x \,\}$$
$$FV(\mathsf{let}\ x = t_1\ \mathsf{in}\ t_2) = FV(t_1) \cup (FV(t_2) \setminus \{\, x \,\})$$

All Variables *References*

$Vars : \textsc{Term} \to \mathcal{P}(\textsc{Var})$

$$Vars(b) = \emptyset$$
$$Vars(\mathsf{if}\ t_1\ \mathsf{then}\ t_2\ \mathsf{else}\ t_3) = Vars(t_1) \cup Vars(t_2) \cup Vars(t_3)$$
$$Vars(x) = \{\, x \,\}$$
$$Vars(\mathsf{let}\ x = t_1\ \mathsf{in}\ t_2) = Vars(t_1) \cup Vars(t_2)$$

Capture-Avoiding Substitution

$[t/x] : \textsc{Term} \to \textsc{Term}$

$$[t/x]b = b$$
$$[t/x]x = t$$
$$[t/x]x_0 = x_0 \text{ if } x \neq x_0$$
$$[t/x](\mathsf{if}\ t_1\ \mathsf{then}\ t_2\ \mathsf{else}\ t_3) = \mathsf{if}\ [t/x]t_1\ \mathsf{then}\ [t/x]t_2\ \mathsf{else}\ [t/x]t_3$$
$$[t/x](\mathsf{let}\ x = t_1\ \mathsf{in}\ t_2) = \mathsf{let}\ x = [t/x]t_1\ \mathsf{in}\ t_2$$
$$[t/x](\mathsf{let}\ x_0 = t_1\ \mathsf{in}\ t_2) = \mathsf{let}\ x_1 = [t/x]t_1\ \mathsf{in}\ [t/x][x_1/x_0]t_2$$
$$\text{if } x \neq x_0$$
$$\text{where } x_1 = \begin{cases} x_0 & x \notin FV(t_2) \vee x_0 \notin FV(t) \\ \min_{x \in \textsc{Var}}(x \notin Vars(t) \cup Vars(t_2)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\boxed{\rightsquigarrow \subseteq \textsc{Redex} \times \textsc{Term}}$ **Notions of Reduction**

$$\text{if true then } t_2 \text{ else } t_3 \rightsquigarrow t_2$$
$$\text{if false then } t_2 \text{ else } t_3 \rightsquigarrow t_3$$
$$\text{let } x = v \text{ in } t \rightsquigarrow [v/x]t$$

$\boxed{\longrightarrow \subseteq \textsc{Term} \times \textsc{Term}}$ **Single-Step Reduction**

$$\frac{t \rightsquigarrow t'}{C[t] \longrightarrow C[t']}$$

$$eval_c : \textsc{Pgm} \to \textsc{Obs}$$
$$eval_c(t) = b \text{ if } t \longrightarrow^* b$$