JZF: Judgmental First-Order Set Theory with Descriptions
CPSC 509: Programming Language Principles

Ronald Garcia

16 March 2024
(**Time Stamp**: 18:19, Friday 29th March, 2024)

Syntax

$\Xi \in \textsc{PropIdentifier}, \quad S \in \textsc{SetIdentifier}, \quad \ell \in \textsc{Label}, \quad \Psi \in \textsc{AtomicProp}$
$\Phi \in \textsc{Prop}, \quad \mathcal{E} \in \textsc{SetExp}, \quad \mathcal{U} \in \textsc{Assumption}, \quad \mathcal{J} \in \textsc{Judgment}, \quad \Gamma \in \textsc{Ctxt}$

$$\begin{array}{lcl}
\Psi & ::= & \Xi \mid \mathcal{E} = \mathcal{E} \mid \mathcal{E} \in \mathcal{E} \\
\Phi & ::= & \Psi \mid \top \mid \bot \mid \Phi \wedge \Phi \mid \Phi \vee \Phi \mid \Phi \Rightarrow \Phi \mid \forall S.\, \Phi \mid \exists S.\, \Phi \\
\mathcal{E} & ::= & S \mid \imath S.\, \Phi \\
\mathcal{U} & ::= & \ell : \Phi \;\mathsf{use} \mid S \;\mathsf{set} \mid \Xi \;\mathsf{prop} \\
\mathcal{J} & ::= & \mathcal{E} \;\mathsf{set} \mid \Phi \;\mathsf{prop} \mid \Phi \;\mathsf{use} \mid \Phi \;\mathsf{verif} \\
\Gamma & ::= & \mathcal{U}, \dots, \mathcal{U} \quad \text{(each label } \ell \text{ and set variable } S \text{ unique in } \Gamma)
\end{array}$$

$\exists! S. \Phi(S) \equiv (\exists S. \Phi(S)) \wedge (\forall S_1.\, \forall S_2.\, \Phi(S_1) \wedge \Phi(S_2) \Rightarrow S_1 = S_2)$

$jwf : \textsc{Judgment} \to \textsc{Judgment}$ (**Well-formedness Judgment**)

$$\begin{aligned}
jwf(\mathcal{E}\;\mathsf{set}) &= \mathcal{E}\;\mathsf{set} \\
jwf(\Phi\;\mathsf{prop}) &= \Phi\;\mathsf{prop} \\
jwf(\Phi\;\mathsf{use}) &= \Phi\;\mathsf{prop} \\
jwf(\Phi\;\mathsf{verif}) &= \Phi\;\mathsf{prop}
\end{aligned}$$

$\boxed{\Gamma \vdash \mathcal{J}}$ **Entailment**

$$\frac{}{\Gamma, \ell_i : \Phi_i \ \mathsf{use} \vdash \Phi_i \ \mathsf{use}} \ (\mathrm{hypU}^{\ell_i}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Psi \ \mathsf{use} \quad \Gamma \vdash \Psi \ \mathsf{prop}}{\Gamma \vdash \Psi \ \mathsf{verif}} \ (\mathrm{atomic})$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top \mathsf{verif}} \ (\top\mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot \mathsf{use} \quad \Gamma \vdash \Phi \ \mathsf{prop}}{\Gamma \vdash \Phi \ \mathsf{verif}} \ (\bot\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi_1 \ \mathsf{verif} \quad \Gamma \vdash \Phi_2 \ \mathsf{verif}}{\Gamma \vdash \Phi_1 \wedge \Phi_2 \ \mathsf{verif}} \ (\wedge\mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi_1 \wedge \Phi_2 \ \mathsf{use}}{\Gamma \vdash \Phi_1 \ \mathsf{use}} \ (\wedge\mathrm{E1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi_1 \wedge \Phi_2 \ \mathsf{use}}{\Gamma \vdash \Phi_2 \ \mathsf{use}} \ (\wedge\mathrm{E2})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi_1 \ \mathsf{verif} \quad \Gamma \vdash \Phi_2 \ \mathsf{prop}}{\Gamma \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2 \ \mathsf{verif}} \ (\vee\mathrm{I1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi_1 \ \mathsf{prop} \quad \Gamma \vdash \Phi_2 \ \mathsf{verif}}{\Gamma \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2 \ \mathsf{verif}} \ (\vee\mathrm{I2})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2 \ \mathsf{use} \quad \Gamma, \ell_1 : \Phi_1 \ \mathsf{use} \vdash \Phi_3 \ \mathsf{verif} \quad \Gamma, \ell_2 : \Phi_2 \ \mathsf{use} \vdash \Phi_3 \ \mathsf{verif} \quad \Gamma \vdash \Phi_3 \ \mathsf{prop}}{\Gamma \vdash \Phi_3 \ \mathsf{verif}} \ (\vee\mathrm{E}^{\ell_1,\ell_2})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi_1 \ \mathsf{prop} \quad \Gamma, \ell_1 : \Phi_1 \ \mathsf{use} \vdash \Phi_2 \ \mathsf{verif}}{\Gamma \vdash \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \ \mathsf{verif}} \ (\Rightarrow\mathrm{I}^{\ell_1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \ \mathsf{use} \quad \Gamma \vdash \Phi_1 \ \mathsf{verif}}{\Gamma \vdash \Phi_2 \ \mathsf{use}} \ (\Rightarrow\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma, S_2 \ \mathsf{set} \vdash \Phi(S_2) \ \mathsf{verif}}{\Gamma \vdash \forall S_1 .\, \Phi(S_1) \ \mathsf{verif}} \ (\forall\mathrm{I}^{S_2}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall S .\, \Phi(S) \ \mathsf{use} \quad \Gamma \vdash \mathcal{E} \ \mathsf{set}}{\Gamma \vdash \Phi(\mathcal{E}) \ \mathsf{use}} \ (\forall\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma, S_2 \ \mathsf{set} \vdash \Phi(S_2) \ \mathsf{prop} \quad \Gamma \vdash \mathcal{E} \ \mathsf{set} \quad \Gamma \vdash \Phi(\mathcal{E}) \ \mathsf{verif}}{\Gamma \vdash \exists S_1 .\, \Phi(S_1) \ \mathsf{verif}} \ (\exists\mathrm{I})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists S_1 .\, \Phi_1(S_1) \ \mathsf{use} \quad \Gamma, S_2 \ \mathsf{set}, \ell_1 : \Phi_1(S_2) \ \mathsf{use} \vdash \Phi_2 \ \mathsf{verif} \quad \Gamma \vdash \Phi_2 \ \mathsf{prop}}{\Gamma \vdash \Phi_2 \ \mathsf{verif}} \ (\exists\mathrm{E}^{S_2,\ell_1})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{E} \ \mathsf{set}}{\Gamma \vdash \mathcal{E} = \mathcal{E} \ \mathsf{use}} \ (\mathrm{refl}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \ \mathsf{use} \quad \Gamma, S \ \mathsf{set} \vdash \mathit{jwf}(\mathcal{J}) \quad \Gamma \vdash [\mathcal{E}_1/S]\mathcal{J} \quad \Gamma \vdash \mathit{jwf}([\mathcal{E}_2/S]\mathcal{J})}{\Gamma \vdash [\mathcal{E}_2/S]\mathcal{J}} \ (\mathrm{eq})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists! S .\, \Phi(S) \ \mathsf{verif}}{\Gamma \vdash \Phi(\imath S .\, \Phi(S)) \ \mathsf{use}} \ (\mathrm{dd})$$

$$\frac{}{\Gamma, S_i \ \mathsf{set} \vdash S_i \ \mathsf{set}} \ (\mathrm{hypS}^{S_i}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists! S .\, \Phi(S) \ \mathsf{verif}}{\Gamma \vdash \imath S .\, \Phi(S) \ \mathsf{set}} \ (\mathrm{ddS})$$

$$\frac{}{\Gamma, \Xi \ \mathsf{prop} \vdash \Xi \ \mathsf{prop}} \ (\mathrm{hypP}^{\Xi}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathcal{E}_1 \ \mathsf{set} \quad \Gamma \vdash \mathcal{E}_2 \ \mathsf{set}}{\Gamma \vdash \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \ \mathsf{prop}} \ (=\mathrm{P}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathcal{E}_1 \ \mathsf{set} \quad \Gamma \vdash \mathcal{E}_2 \ \mathsf{set}}{\Gamma \vdash \mathcal{E}_1 \in \mathcal{E}_2 \ \mathsf{prop}} \ (\in\mathrm{P})$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top \ \mathsf{prop}} \ (\top\mathrm{P}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \bot \ \mathsf{prop}} \ (\bot\mathrm{P}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi_1 \ \mathsf{prop} \quad \Gamma \vdash \Phi_2 \ \mathsf{prop}}{\Gamma \vdash \Phi_1 \wedge \Phi_2 \ \mathsf{prop}} \ (\wedge\mathrm{P})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi_1 \ \mathsf{prop} \quad \Gamma \vdash \Phi_2 \ \mathsf{prop}}{\Gamma \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2 \ \mathsf{prop}} \ (\vee\mathrm{P}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi_1 \ \mathsf{prop} \quad \Gamma, \ell_1 : \Phi_1 \ \mathsf{use} \vdash \Phi_2 \ \mathsf{prop}}{\Gamma \vdash \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \ \mathsf{prop}} \ (\Rightarrow\mathrm{P})$$

$$\frac{\Gamma, S_2 \ \mathsf{set} \vdash \Phi(S_2) \ \mathsf{prop}}{\Gamma \vdash \forall S_1 .\, \Phi(S_1) \ \mathsf{prop}} \ (\forall\mathrm{P}) \qquad \frac{\Gamma, S_2 \ \mathsf{set} \vdash \Phi(S_2) \ \mathsf{prop}}{\Gamma \vdash \exists S_1 .\, \Phi(S_1) \ \mathsf{prop}} \ (\exists\mathrm{P})$$