Stochastisch-Lokale Suchverfahren — Methoden, Modelle, Anwendungen

Deutsche Zusammenfassung der Dissertationsschrift
vorgelegt am Fachbereich Informatik
der Technischen Universität Darmstadt von

Dipl.-Informatiker Holger H. Hoos

zur Erlangungen des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaft (Dr. rer. nat)

Darmstadt, 30. September 1998

Betreuer und Erstreferent: Prof. Dr. Wolfgang Bibel
Koreferent: Prof. Dr. Hermann K.-G. Walter
Externer Gutachter: Prof. Dr. Bart Selman (Cornell University, USA)

Einleitung

Die vorliegende deutsche Zusammenfassung meiner Dissertationsschrift mit dem Titel „Stochastisch-Lokale Suchverfahren — Methoden, Modelle, Anwendungen“ (“Stochastic Local Search — Methods, Models, Applications”) gibt einen Überblick über die wichtigsten Inhalte und Ergebnisse meiner Arbeit. Die eigentliche Dissertationsschrift ist in englischer Sprache verfaßt, da einer der Gutachter, Prof. Bart Selman von der Cornell University (USA), englischsprachig ist; weiterhin hoffe ich, auf diese Weise die Ergebnisse einer breiteren internationalen Fachgemeinde direkt zugänglich zu machen.

Stochastisch-lokale Suchverfahren (kurz SLS-Verfahren) zählen heute zu den Standardmethoden zur Lösung schwieriger kombinatorischer Probleme aus verschiedenen Bereichen der Intellektik (auch als Künstliche Intelligenz oder KI bezeichnet) und des „Operations Research“ (OR). Einige der erfolgreichsten und leistungsfähigsten Algorithmen zur Lösung bekannter Probleme, wie SAT (das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem), CSP (das „Constraint Satisfaction“-Problem), TSP (das Handlungsreisendenproblem) oder QAP (das Quadratische-Zuordnungsproblem), basieren auf stochastisch-lokaler Suche. Viele SLS-Verfahren, wie „Stochastic Hill-climbing“ (stochastischer Gradientenabstieg), Tabusuche und „Simulated Annealing“ können generisch zur Lösung verschiedenster kombinatorischer Entscheidungs- und Optimierungsprobleme eingesetzt werden. Andere bekannte und erfolgreiche Algorithmenfamilien, wie etwas Evolutionäre Algorithmen oder Ameisenalgorithmen („Ant Colony Optimisation“) basieren ebenfalls auf dem Konzept der stochastisch-lokalen Suche.

In der Intellektik ist die Erfolgsgeschichte von SLS-Verfahren eng mit deren Anwendung zur Lösung des aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblems (SAT) verknüpft. SAT ist ein konzeptuell einfaches kombinatorisches Entscheidungsproblem; es gilt als prototypisches NP-vollständiges Problem und spielt eine wichtige Rolle in der Komplexitätstheorie. Alle NP-vollständigen Probleme können polynomiell auf SAT reduziert werden; diese Reduktionen werden oft im Zusammenhang mit NP-Vollständigkeitsbeweisen verwendet. Aufgrund kürzlicher Erfolge bei der Lösung von SAT-kodierten Planungsproblemen mithilfe moderner SLS-Algorithmen scheint es möglich, daß solche Reduktionen auch in der Praxis einen gangbaren Weg zur Lösung schwieriger kombinatorischer Anwendungsprobleme eröffnen. Dabei bietet SAT als Repräsentationsdomäne eine Reihe von Vorteilen gegenüber anderen NP-vollständigen Problemen. Seine konzeptuelle Einfachheit begünstigt die Entwicklung und Implementation von SLS-Verfahren. Weiterhin sind einfach zu realisierende SAT-Kodierungen für viele Problemklassen bekannt. Und schließlich können SLS-Algorithmen für SAT in der Regel auf einfache Weise auf CSPs, die oft eine natürlichere und kompaktere Darstellung der Probleme ermöglichen, verallgemeinert werden. Ein genereller Vorteil von stochastisch-lokaler Suche gegenüber systematischen Suchverfahren ist die Tatsache, daß die gleichen Algorithmen sowohl zur Lösung der Entscheidungs- als auch der zugehörigen Optimierungsvarianten von kombinatorischen Problemen eingesetzt werden können. So können beispielsweise SLS-Algorithmen für SAT ebenso zur Lösung des MAXSAT-Problems, bei dem es um das Finden minimal inkonsistenter Lösungen geht, benutzt werden.

Unter Berücksichtigung dieser Argumente konzentriert sich die in dieser Arbeit vorgestellte Forschung hauptsächlich auf stochastisch-lokale Suchverfahren für SAT. Dennoch sind die hier entwickelten und benutzen Methoden in der Regel keinesfalls auf das SAT-Problem beschränkt, sondern werden auf diese Problemklasse lediglich beispielhaft angewandt. Aus diesem Grunde werden zwei der wichtigsten Beiträge dieser Arbeit, die neuentwickelte Methodik zur adäquaten empirischen Analsyse von Las-Vegas-Algorithmen (Kapitel 2) und das GLSM-Modell stochastisch-lokaler Suchverfahren (Kapitel 3), in einem allgemeineren Rahmen eingeführt, bevor sie im Zusammenhang mit unseren Untersuchung von SLS-basierten SAT-Algorithmen angewandt werden. Weiterhin liegen deutliche Hinweise darauf vor, daß die Charakterisierungsresultate bezüglich des Verhaltens einiger bekannter SLS-Algorithmen für SAT (Kapitel 5) ebenfalls für SLS-Verfahren zur Lösung anderer kombinatorischer Probleme, wie beispielsweise CSP, gelten.

Zum Aufbau der Arbeit

Die Dissertationsschrift ist in acht große Abschnitte gegliedert: einen Prolog (Einleitung), die Kapitel 1 bis 6 und einen Epilog (Schlußbemerkungen). Jedes der Kapitel 1–6 beginnt mit einer kurzen Einführung und endet mit einer Literaturübersicht und einer Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse. Die einzelnen Kapitel sind daher, trotz enger inhaltlicher Beziehungen, relativ eigenständig; dieser Aufbau wurde gewählt, um ein selektives Lesen der Arbeit zu unterstützen und somit die in den einzelnen Kapiteln behandelten Aspekte speziell an diesen interessierten Lesern leichter zugänglich zu machen.

Kapitel 1: Logik, Suchverfahren und NP-harte Probleme

In diesem einführenden Kapitel werden Hintergrund und Motivation für das in der vorliegenden Arbeit behandelten Thema dargestellt. Zu Beginn führen wir kurz in allgemeine Problemstellungen und Themen der Intellektik ein. Dabei unterscheiden wir zwischen verschiedenen Problemtypen: Repräsentations- und Berechnungsproblemen, sowie Entscheidungs- und Optimimierungsproblemen. Viele wichtige Probleme der Intellektik werden mithilfe von Logiken formalisiert und können allgemein als Suchprobleme interpretiert werden. Wir unterscheiden zwei generelle Ansätze zur Lösung dieser Probleme: systematische und lokale Suchverfahren; sodann führen wir das Konzept der stochastisch-lokalen Suche ein und stellen einige der kürzlich mithilfe von stochastisch-lokalen Suchverfahren erzielten Erfolge kurz dar.

Anschließend führen wir ein Modell zur generischen Lösung von schwierigen kombinatorischen Problemen ein, welches die Motivation für einen Großteil der in dieser Arbeit untersuchten Fragestellungen liefert. Dieses beruht auf der Transformation der gegebenen Probleminstanz in eine Zwischenebene, auf der dann Standard-SLS-Verfahren zur Lösung eingesetzt werden. Dieser Ansatz wurde kürzlich erfolgreich zur Lösung von Problemen aus verschieden Bereichen der Informatik eingesetzt; bislang ist jedoch ungewiß, ob solche

Ergebnisse für eine größere Anzahl relevanter Problemklassen erzielt werden können. Der zugrundeliegende Ansatz, Probleme mithilfe von Abbildungen auf andere Darstellungen zu lösen, ist in der Informatik allgemein, und insbesondere in der Intellektik, weit verbreitet. Das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem (SAT) bietet sich als Zwischenebene zur Repräsentation schwieriger kombinatorischer Probleme an, da es hinreichend ausdrucksstark ist, um eine große Klasse interessanter Probleme abzudecken; gleichzeitig hat es gegenüber eng verwandten Problemklassen wie CSP den Vorteil syntaktischer und konzeptioneller Einfachheit, welches die Entwicklung und Analyse von Algorithmen deutlich begünstigt.

Wie viele Probleme in der Intellektik ist das SAT-Problem NP-hart; generell besteht wenig Hoffnung, für derartige Probleme effiziente Algorithmen, d.h., solche mit günstigerem als exponentiellem Laufzeitverhalten, zu finden. Dennoch besteht die Möglichkeit, daß interessante oder anwendungsrelevante Teilklassen der allgemeinen Probleme effizient lösbar sind. Doch selbst, falls dies nicht der Fall sein sollte, ist die Transformation nach SAT und die anschließende Lösung mithilfe allgemeiner SAT-Algorithmen möglicherweise dennoch günstig — beispielsweise, da Verbesserungen an diesen SAT-Algorithmen direkte Vorteile für eine potentiell große Anzahl von Problemklassen mit sich bringen.

Das Konzept dieses allgemeinen Ansatzes zum generischen Problemlösen weist eine gewisse Eleganz auf; seine Machbarkeit wird durch beeindruckende Erfolge, die hauptsächlich auf der dramatischen Verbesserung von SLS-Verfahren zur Lösung harter SAT-Instanzen beruhen, nahegelegt. Innerhalb der KI-Gemeinde gibt es daher ein starkes und weiterhin wachsendes Interesse an Themen wie der Entwicklung und Analyse moderner SAT-Algorithmen, effizienten SAT-Kodierungen, und Anwendungen dieses allgemeinen Ansatzes. Die Untersuchung von Fragestellungen zu diesen Themen bildet den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit. Während die Frage, inwieweit der dargestellte allgemeine Ansatz zur generischen Problemlösung durch SAT-Reduktion und Verwendung von SLS-Algorithmen für eine größere Anzahl schwieriger Anwendungsprobleme eingesetzt werden kann, offen bleibt, sind wir überzeugt, daß die in den folgenden Kapiteln dargestellten Resultate einen wichtigen Beitrag zur Analyse, zur Verbesserung, und zum tieferen Verständnis des allgemeinen Ansatzes liefern.

Kapitel 2: Empirische Analyse von Las-Vegas-Algorithmen

Las-Vegas-Algorithmen sind nichtdeterministische Algorithmen, deren Laufzeit für eine gegebene Probleminstanz durch eine Zufallsvariable beschrieben wird. Von Las-Vegas-Algorithmen gefundene Lösungen sind immer korrekt; allerdings können diese Verfahren unvollständig sein, d.h., es kann nicht garantiert werden, daß für lösbare Probleminstanzen auch tatsächlich eine Lösung gefunden wird. Stochastisch-lokale Suchverfahren gehören ebenso zur Klasse der Las-Vegas-Algorithmen wie neuere, randomisierte systematische Suchverfahren.

Aufgrund ihrer nichtdeterministischen Natur ist das Laufzeitverhalten von Las-Vegas-Algorithmen in der Regel schwierig zu analysieren. Selbst in Fällen, in denen theoretische

Resultate existieren, ist deren praktische Bedeutung oft sehr eingeschränkt. Ein Beispiel hierfür ist „Simulated Annealing“, ein Optimierungsverfahren, für das, unter bestimmten Bedingungen, die Konvergenz gegen ein globales Optimimum bewiesen ist; diese Bedingungen sind jedoch in praktischen Anwendungen nicht erfüllbar. Aufgrund dieser Ausgangslage wird das Laufzeitverhalten von Las-Vegas-Algorithmen meist mithilfe empirischer Methoden untersucht. Obwohl es sich um vollständig spezifizierte Algorithmen handelt, deren Funktion auf einfache Weise Schritt für Schritt nachvollzogen werden kann, finden sich Informatiker hier in gewisser Hinsicht in einer ähnlichen Lage wie beispielsweise Physiker bei der Untersuchung nichtdeterministischer Quantenphänomene oder Mikrobiologen bei der Erforschung von Bakterienwachstum.

Bei genauer Betrachtung stellt sich die bislang zur Analyse von Las-Vegas-Algorithmen benutzte Methodik als unzureichend und in Teilen problematisch heraus. In der Literatur wurde wiederholt darauf hingewiesen, daß die zur Bewertung und zum Vergleich solcher Algorithmen benutzten empirischen Methoden in anderen empirischen Wissenschaften schon lange etablierten Standards nicht genügen. Daher wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein neuer Ansatz zur empirischen Analyse von Las-Vegas-Algorithmen entwickelt und eingesetzt. Unsere Methode basiert auf der Messung und Analyse von Laufzeitverteilungen (engl. „run-time distributions“, RTDs) für einzelne Probleminstanzen.

Aufbauend auf einer Klassifikation der Anwendungenssituationen in denen Las-Vegas-Algorithmen eingesetzt werden, zeigen wir, daß im allgemeinen lediglich RTDs die zur adäquaten Beschreibung des Laufzeitverhaltens benötigten Informationen vollständig beinhalten. Verglichen mit den bislang in der KI benutzen Methoden zur empirischen Analyse von Las-Vegas-Algorithmen, vermittelt unser neuer Ansatz einen weitaus detaillierteren und realistischeren Eindruck vom Verhalten dieser Algorithmen. Dennoch erfordert er keinen nennenswerten zusätzlichen Aufwand bei der Datenaquisition, sondern basiert auf einer effizienteren Nutzung der ohnehin erhobenen Daten.

Weiterhin indentifizieren und diskutieren wir zwei Arten von Problemen, die üblicherweise im Zusammenhang mit der Verwendung inadäquater Methodik auftreten: Oberflächlichkeit in der Analyse des Laufzeitverhaltens und das Mitteln über inhomogene Mengen von Testinstanzen. Es wird aufgezeigt, wie in der KI-Literatur häufig benutzte Methoden zur empirischen Untersuchung von SLS-Verfahren zu inkorrekten Schlußfolgerungen führen können. Diese Problematik wird mithilfe der hier entwickelten Methodik prinzipiell vermieden. Wir umreißen weiterhin, wie unser Ansatz dazu verwendet werden kann, interessante Resultate bei der Charakterisierung einiger der bekanntesten SLS-Verfahren in der neueren KI-Forschung zu erzielen. Dies wird ausführlicher in Kapitel 5 behandelt, wo wir ein derartiges empirisches Charakterisierungsresultat für die RTDs verschiedener moderner SLS-Verfahren für eine Reihe bekannter Problemklassen angeben.

Bei vergleichenden Untersuchungen von Las-Vegas-Algorithmen erlaubt unsere neue Methodik eine sehr viel detailliertere Analyse; diese liefert ferner die Basis, durch Linearkombination verschiedener Las-Vegas-Algorithmen zu Hybridalgorithmen eine deutliche Verbesserung der Robustheit gegenüber den Einzelalgorithmen zu erzielen. Wie wir weitherhin zeigen,

kann die RTD-basierte Methodik auf naheliegende Weise auf Las-Vegas-Optimierungsalgorithmen ausgedehnt werden. Dabei werden die wichtigsten Charakteristika des zuvor für Entscheidungsalgorithmen eingeführten Ansatzes im wesentlichen unverändert übertragen und, soweit erforderlich, entsprechend verallgemeinert.

In den folgenden Kapiteln der Arbeit dient die hier entwickelte Methodik als Basis zur Untersuchung des Verhaltens von SLS-Verfahren. Wie sich später zeigen wird, ist sie eine wichtige Grundlage für eine Fülle interessanter Resultate (insbesondere die in Kapitel 5 beschriebenen) von theoretischer und praktischer Bedeutung.

Kapitel 3: Das GLSM-Modell

In diesem Kapitel führen wir das GLSM-Modell („Generalised Local Search Machines"), einen neuen formalen Rahmen für stochastisch-lokale Suchverfahren, ein. Das Modell basiert auf der Annahme, daß adäquate SLS-Algorithmen durch Kombination einfacher, „reiner" Suchstrategien mithilfe eines Kontrollmechanismus gewonnen werden können. Im GLSM-Modell wird dieser Kontrollmechanismus im wesentlichen durch nichtdeterministische endliche Automaten realisiert, deren Zustände mit den reinen Suchstrategien assoziiert sind. Endliche Automaten (EA) gehören zu den grundlegendsten und fruchtbarsten Konzepten in der Informatik; ihre Verwendung zur Formalisierung lokaler Suchverfahren bietet einen Reihe von Vorteilen.

Zunächst sind EA-basierte Modelle konzeptuell einfach und können infolgedessen auf einfache und effiziente Weise implementiert werden. Gleichzeitig ist der Formalismus ausdrucksstark genug, um nahezu alle modernen SLS-Algorithmen adäquat representieren zu können (dies wird in Kapitel 4 beispielhaft belegt). Weiterhin sind endliche Automaten in der Literatur ausgiebig untersucht worden; viele der bekannten Ergebnisse und Methoden können somit direkt auf das GLSM-Modell angewendet werden, was besonders im Zusammenhang mit der Optimierung von GLSMs interessant ist. Schließlich begünstigt das GLSM-Modell unserer Erfahrung nach die Entwicklung und Realisierung neuer, hybrider lokaler Suchverfahren. In diesem Zusammenhang spielen konzeptionelle Aspekte und Implementationsfragen eine Rolle: aufgrund der konzeptuellen Simplizität und der klaren Trennung zwischen Suchstrategie und Suchkontrolle können hybride Kombinationen bekannter Algorithmen auf einfache und effiziente Weise formuliert und getestet werden.

Ausgehend von einer einfachen und klaren Definition des GLSM-Modells wird dessen Semantik auf naheliegende Weise formalisiert. Anschließend diskutieren wir den engen Zusammenhang zwischen dem GLSM-Modell und einem Standardschema für lokale Suchverfahren. Es folgt eine Kategorisierung von GLSM-Typen nach Struktur und Transitionstypen, anhand derer deutlich wird, wie das allgemeine Modell eine systematische Betrachtung von Suchkontrollmechanismen ermöglicht. Abschließend werden verschiedene Ansätze zur Erweiterung des einfachen GLSM-Modells enwickelt und diskutiert. Die vorgeschlagenen Erweiterungen umfassen verschiedene Lernmechanismen, kooperative bzw. parallele Modelle, evolutionäre und populationsorientierte Ansätze sowie GLSM-Modelle für kontinuierliche

lokale Suchverfahren. Die meisten dieser Erweiterungen sind sehr natürliche Generalisierungen des grundlegenden Modells; diese demonstrieren die Tragweite des zugrundeliegenden Konzepts und bieten gleichzeitig Ansatzpunkte für weiterführende Arbeiten.

Im Rahmen dieser Arbeit werden GLSMs hauptsächlich zur Formalisierung, zur Realisierung und zur Analyse von SLS-Verfahren für SAT eingesetzt. In Kapitel 5 wird gezeigt, wie mithilfe geringfügiger Modifikationen solcher GLSMs einige der gegenwärtig leistungsstärksten SAT-Algorithmen weiter verbessert werden können. In Kapitel 6 werden extrem einfache GLSMs als Sonden zur Untersuchung von Suchraumstrukturen für SAT-Instanzen verwendet. Diese Anwendungen belegen die Nützlichkeit des GLSM-Modells, sie nutzen jedoch kaum seine volle Ausdrucksfähigkeit. So können die meisten neueren SLS-Algorithmen mithilfe sehr einfacher GLSMs formalisiert werden; die Tatsache, daß die leistungsfähigsten unter ihnen strukturell leicht komplizierter sind, legt jedoch die Vermutung nahe, daß durch die Entwicklung komplexerer Kombinationen einfacher Suchstrategien weitere Leistungssteigerungen erzielbar sind. Diese Hypothese wird durch einige der in Kapitel 5 erzielten Resultate belegt; ihre Gültigkeit ist jedoch durch die zukünftige Entwicklung leistungsfähiger hybrider GLSM-Algorithmen für verschiedene Problemklassen zu belegen.

Kapitel 4: SLS-Verfahren für SAT

Stochastisch-lokale Suchverfahren für SAT stoßen in der KI auf reges Interesse, seit 1992 unabhängig sowohl von Selman, Levesque und Mitchell, als auch von Gu einfache SLS-Algorithmen entwickelt wurden, die sich auf einer Reihe von Problemklassen den bis dahin besten systematischen SAT-Algorithmen deutlich überlegen zeigten. Seitdem sind zahlreiche weitere SLS-Verfahren für SAT eingeführt worden; die besten unter diesen können zur Zeit schwierige SAT-Instanzen mit bis zu einigen tausend Variablen innerhalb weniger Stunden lösen.

In diesem Kapitel formalisieren wir zunächst einige der wichtigsten und bekanntesten SLS-Algorithmen für SAT mithilfe des in Kapitel 3 entwickelten GLSM-Modells. Es handelt sich hierbei um zwei Varianten des bekannten GSAT-Algorithmus (GWSAT und GSAT+tabu) sowie um den WalkSAT-Algorithmus und drei seiner neueren Varianten (WalkSAT+tabu, Novelty, R-Novelty). Auf der Grundlage der GLSM-Darstellungen dieser Algorithmen diskutieren wir spezifische Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den verschiedenen Algorithmen. Anschließend beschreiben wir eine im Rahmen dieser Arbeit zusammengestellte Sammlung von Benchmarkproblemen; diese umfaßt sowohl zufällig erzeugte, schwierige SAT-Instanzen (Random-3-SAT), als auch SAT-kodierte Instanzen anderer Anwendungsprobleme, wie Graphfärbung, „Blocks World Planning“ (ein konzeptuell einfaches Planungspro-

blem) und dies in diesem Zusammenhang erstmals verwendete Allintervallreihenproblem[1] Wie in Kapitel 2 erörtert, ist eine solche Benchmarksammlung eine wichtige Grundlage zur vergleichenden Untersuchung stochastischer Algorithmen. Tatsächlich ist es von großer Wichtigkeit, solche Verfahren auf einer identischen Menge von Probleminstanzen zu evaluieren, wenn Zufallsverteilungen von Probleminstanzen mit hoher Variabilität der Schwierigkeit verwendet werden (dies trifft beispielsweise für oft verwendeten Klassen von Random-3-SAT- und Graphfärbeproblemen zu). Bislang existierte jedoch keine hinreichend umfassende Problemsammlung für SAT, die breite Verwendung gefunden hätte. Daher mußten wir eine solche Sammlung neu anlegen; diese ist nun auch über die SATLIB-Webseite (`www.informatik.tu-darmstadt.de/AI/SATLIB`) öffentlich verfügbar.

Auf der Basis dieser Benchmarksammlung wurde im Rahmen dieser Arbeit eine umfangreiche und detaillierte vergleichende Studie zur Leistungsfähigkeit verschiedener SLS-Algorithmen durchgeführt. Im Unterschied zu den meisten vorhergehenden Studien wird hierbei eine empirische Methodik verwendet, welche die extreme Variabilität in der Schwierigkeit innerhalb von Testmengen aus zufällig erzeugten Probleminstanzen angemessen berücksichtigt (vergl. Kapitel 2). Aufgrund von Vergleichen der Laufzeitverteilungen verschiedener Algorithmen für einzelne Probleminstanzen konnten wir zeigen, daß für optimale Einstellungen eines allen hier betrachteten Algorithmen gemeinsamen, kritischen Parameters (dieser sog. „noise parameter“ kontrolliert die Stochastizität der Verfahren), eine vollständige Dominanzbeziehung zwischen den Verfahren die Regel zu sein scheint. Dies bedeutet, daß beim Vergleich zweier Algorithmen auf derselben Probleminstanz einer von diesen eine konsistent höhere Leistung (Lösungswahrscheinlichkeit für feste Laufzeit) zeigt. Ausnahmen von dieser Regel werden vereinzelt beobachtet, vor allem für das Allintervallreihenproblem, für das Novelty und R-Novelty für kurze Laufzeiten die beste Leistung zeigen, während andere WalkSAT-Varianten für längere Laufzeiten deutlich bessere Ergebnisse liefern.

Zwischen den verschiedenen Problemklassen beobachten wir keine konsistenten Leistungsunterschiede für die verschiedenen Algorithmen. Während R-Novelty für Random-3-SAT, insbesondere für schwierige Probleminstanzen, eindeutig allen anderen Verfahren überlegen ist, zeigt Novelty auf Graphfärbeproblemen konsistent höhere Leistung. R-Novelty führt ebenfalls für die kleineren „Blocks World Planning“-Instanzen, während dieser Algorithmus für größere Instanzen Stagnationsverhalten zeigt und gegenüber WalkSAT+tabu deutlich unterlegen ist. Sowohl Novelty als auch R-Novelty haben große Schwierigkeiten bei der Lösung von Instanzen des Allintervallproblems; diese sind ebenfalls auf eine frühzeitige Stagnation der Suche zurückzuführen. Während GWSAT in aller Regel allen WalkSAT-Varianten deutlich unterlegen ist (außer in Fällen, in denen letztere unter frühzeitiger Stagnation leiden), zeigt sich GWSAT+tabu fast überall überlegen gegenüber WalkSAT. Überraschenderweise dominiert dieser Algorithmus für schwierige Graphfärbeinstanzen sogar alle anderen Ver-

[1] Das Allintervallreihenproblem ist ein kombinatorisches Entscheidungsproblem, das auf eine bekannte Problemstellung aus der seriellen Komposition (Schönberg, Berg, Krenek) zurückgeht. Die hier verwendete, abstrakte und verallgemeinerte Form ist als algebraisches Problem über endlichen Reihen natürlicher Zahlen formuliert und weist gewisse Ähnlichkeiten mit bekannten mathematischen Problemstellung wie dem Finden Lateinischer Quadrate oder der Vervollständigung von Quasigruppen auf.

fahren.

In einer detaillierteren Untersuchung analysieren wir nachfolgend die Korrelation zwischen der Leistung verschiedener Algorithmen für Testmengen von Random-3-SAT- und Graphfärbeinstanzen. Das Ergebnis dieser Analyse zeigt, daß die Leistung (mittlere Anzahl der lokalen Suchschritte pro gefundener Lösung) der Algorithmen paarweise stark linear korreliert ist; dies bedeutet, daß Probleminstanzen, die für einen Algorithmus schwierig sind, in der Tendenz auch für alle anderen Verfahren eine hohe Schwierigkeit aufweisen. Folglich ist es gerechtfertigt, von einer inhärenten Schwierigkeit der Probleminstanzen zu sprechen. Die Existenz dieser starken Korrelation in der Schwierigkeit für verschiedene SLS-Verfahren ist relativ überraschend, da die den Algorithmen zugrundeliegenden Konzepte hinreichend verschieden sind, um deutliche Leistungsunterschiede zu verursachen. Dies legt die Vermutung nahe, daß der Suchaufwand für diese Algorithmen auf den gleichen strukturellen Eigenschaften der zugrundeliegenden Suchräume beruht. In Kapitel 6 werden einige dieser Struktureigenschaften näher untersucht.

Ein weiteres interessantes Resultat liegt in der Tatsache, daß WalkSAT+tabu, Novelty, und auch R-Novelty für optimale Parametrisierung Stagnationsverhalten für eine Reihe von Probleminstanzen („Ausreißer“) aus den Random-3-SAT- und Graphfärbe-Testmengen zeigen. Dieses Phänomen korreliert nicht mit der inhärenten Schwierigkeit der entsprechenden Probleminstanzen, ist also von den Faktoren, welche die inhärente Schwierigkeit einer Instanz bestimmen, unabhängig. Fernerhin beobachten wir, daß unter Vernachlässigung dieser Ausreißer die Leistung von WalkSAT, Novelty und R-Novelty deutlich besser mit der inhärenten Schwierigkeit skaliert, als GWSAT und WalkSAT+tabu. Der GWSAT-Algorithmus, der das schlechteste Skalierungsverhalten für Random-3-SAT aufweist, zeigt nicht nur die beste Leistung, sondern auch das günstigste Skalierungsverhalten für Graphfärbeprobleme. Vergleicht man generell die Leistung von SLS-Algorithmen zwischen der „Blocks World“-Planungsdomäne und den Allintervallreiheninstanzen, fällt auf, daß letztere erheblich schwieriger (relativ zur Problemgröße) sind als die Planungsprobleme. Da in beiden Fällen, ebenso wie für die Graphfärbeinstanzen, im wesentlichen die gleiche SAT-Kodierung verwendet wurde, ist davon auszugehen, daß die Ursache für diesen Unterschied eher in der ursprünglichen Problemstellung, als an der gewählten SAT-Kodierung liegt.

Die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Die hier untersuchten Algorithmen zeigen erhebliche Leistungsunterschiede; diese sind jedoch in der Regel nicht konsistent zwischen verschiedenen Problemklassen. Folglich gibt es keinen einzelnen besten Algorithmus, der alle anderen Algorithmen auf allen hier untersuchten Problemklassen dominiert. Es wurde jedoch eine inhärente Schwierigkeit von Probleminstanzen nachgewiesen — im wesentlichen sind dieselben Probleminstanzen schwierig für alle hier untersuchten SLS-Algorithmen. Dennoch sind zwischen den Algorithmen systematische Abweichungen im Skalierungsverhalten ihrer Leistung mit der inhärenten Schwierigkeit der Probleminstanzen zu beobachten. Daneben haben wir für einige der neuesten und leistungsfähigsten SLS-Verfahren für SAT (wie Novelty oder R-Novelty) eine Anfälligkeit für Stagnationsverhalten festgestellt, die deren Leistung, besonders auf schwierigen, strukturierten Probleminstanzen stark beinträchtigt.

Kapitel 5: Charakterisierung und Verbesserung des Verhaltens von SLS Algorithmen

Aufbauend auf den Untersuchungen aus Kapitel 4 wird in diesem Kapitel die Analyse des Verhaltens von SLS-Algorithmen ausgedehnt und verfeinert. Gegenstand dieser Analyse sind die im vorherigen eingeführten SLS-Algorithmen für SAT; für empirische Untersuchungen wird erneut die im letzten Kapitel vorgestellte Benchmarksammlung benutzt. Die hierbei verwendete Methodik ist jedoch keinesfalls auf das SAT-Problem beschränkt, sondern problemlos auf andere Problemklassen und SLS-Algorithmen übertragbar. Die Hauptergebnisse dieses Kapitels lassen sich in drei Kategorien einteilen: theoretische Ergebnisse zum asymptotischen Laufzeitverhalten von modernen SLS-Algorithmen für SAT; funktionale Charakterisierungen des tatsächlich beobachteten Verhaltens; sowie eine Reihe von Methoden zur Verbesserung der untersuchten Algorithmen.

Zunächst beweisen wir eine Reihe von theoretischen Resultaten bezüglich des asymptotischen Laufzeitverhaltens von GWSAT, WalkSAT+tabu, Novelty und R-Novelty. Im einzelnen wird gezeigt, daß für Walk-Wahrscheinlichkeiten $\mathtt{wp} > 0$ GWSAT approximativ vollständig ist *(PAC-Eigenschaft)*, d.h., für beliebig lange Laufzeiten strebt die Wahrscheinlichkeit, zu einer lösbaren Probleminstanz eine Lösung zu finden, gegen eins. Für WalkSAT+tabu, Novelty und R-Novelty hingegen können wir durch Konstruktion eines einfachen Beispiels zeigen, daß sie essentiell unvollständig sind — es gibt also lösbare Probleminstanzen, für die, mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, auch für beliebig lange Laufzeiten keine Lösung gefunden wird. Dieses Resultat gilt für beliebige Tabulistenlänge und Walk-Parametereinstellungen. Allerdings folgt aus der essentiellen Unvollständigkeit nicht notwendigerweise, daß eine frühzeitige Stagnation der lokalen Suche für *jede* Probleminstanz oder in *jedem* Lauf des Algorithmus zu beobachten ist. Dennoch läßt sich Stagnationsverhalten in der Praxis beobachten (siehe Kapitel 4), wo es die Performanz dieser Algorithmen, die ansonsten zu den derzeit leistungsfähigsten SAT-Verfahren gehören, erheblich beeinträchtigt.

Anschließend wenden wir uns der funktionalen Charakterisierung von SLS-Verhalten zu; in diesem Zusammenhang untersuchen wir das empirische Laufzeitverhalten von WalkSAT, WalkSAT+tabu, Novelty und R-Novelty. Für diese Algorithmen wird zunächst anhand umfangreicher empirischer Untersuchungen gezeigt, daß unter Verwendung optimaler Tabulistenlängen bzw. Walk-Parametereinstellungen die Laufzeitverteilungen durch Exponentialverteilungen approximiert werden können *(EPAC-Eigenschaft)*. Die Güte der Approximationen wird mithilfe des in der Statistik häufig benutzten χ^2-Anpassungstests nachgewiesen. Es zeigt sich, daß für schwierige Instanzen aus allen Problemklassen unserer Benchmarksammlung die Anpassungen den χ^2-Test bestehen, während für relativ leichte oder sehr kleine Probleminstanzen und kurze Laufzeiten systematische Abweichungen von einer idealen Exponentialverteilung zu beobachten sind. Exponentialverteilte Laufzeiten werden ebenfalls bei Überschreitung der optimalen Tabulistenlängen bzw. Walk-Parametereinstellungen nachgewiesen. Bei Unterschreitung der optimalen Parameterwerte tritt dagegen ein qualitativ unterschiedliches Verhalten auf, das in der Regel durch Stagnation der Suche für lange

Laufzeiten gekennzeichnet ist.

In einem weiteren Schritt entwickeln wir ein verfeinertes mathematisches Modell zur Modellierung der für kurze Läufe und leichte Instanzen beobachteten Abweichungen. Wir interpretieren diese Abweichungen als charakteristisch für die initiale Suchphase, in der die hier untersuchten Algorithmen eine geringere Performanz zeigen als im späteren Verlauf der Suche. Um das Verhalten währen dieser initialen Suchphase zu modellieren, führen wir durch geeignete Generalisierung der Exponentialverteilung eine neue Klasse von Verteilungsfunktionen ein. Jede Verteilung dieser Klasse nähern sich mit wachsender Laufzeit asymptotisch einer Exponentialverteilung, erlaubt jedoch die präzise Modellierung der für die initiale Suchphase charakteristischen Abweichungen. Für die überwältigende Mehrzahl der Probleminstanzen aus unserer Benchmarksammlung ist damit eine genaue Charakterisierung des Laufzeitverhaltens möglich. Die wenigen Ausnahmen lassen sich durch lineare Kombination von generalisierten Exponentialverteilungen beschreiben; die entsprechenden Probleminstanzen scheinen inhärente „Fallen“ für die lokale Suche zu enthalten, aus denen der Algorithmus zwar prinzipiell entkommen kann, die aber zu zwischenzeitlichem Stagnationsverhalten unterschiedlicher Ausprägung führen. Insgesamt erlauben unsere Charakterisierungsresultate erstmals eine hochgenaue mathematische Modellierung des empirisch beobachteten Verhaltens einiger der bekanntesten und leistungsfähigsten SLS-Algorithmen für SAT.

Diese Resultaten haben eine Reihe interessanter Konsequenzen. Die erste Schlußfolgerung betrifft die Wirksamkeit von „Random Restart“, einem für nahezu alle SLS-Verfahren verwendeten Mechanismus zur Reinitialisierung der lokalen Suche nach einer bestimmten Anzahl von Suchschritten. Aufgrund der zuvor beobachteten exponentiellen Laufzeitverteilungen kann darauf geschlossen werden, daß für die entsprechenden Algorithmen und Parametereinstellungen „Random Restart“ ineffektiv ist bzw., wenn die Reinitialisierung zu früh erfolgt, sogar leistungsmindernd wirkt. Als weitere Konsequenz legen die beobachteten exponentiellen Laufzeitverteilungen eine neue Interpretation des Verhaltens der entsprechenden SLS-Algorithmen nahe: Diese zeigen nämlich das gleiche Verhalten, wie man es für „Random Picking“, eine der einfachsten randomisierten Suchstrategien, die im wesentlichen einem zufälligen Herumstochern im Suchraum entspricht, erwarten würde. Somit kann man das Verhalten von SLS-Verfahren, für welche die EPAC-Eigenschaft (s.o.) beobachtet wurde, als zufälliges Stochern in einem virtuellen Suchraum interpretiert werden, dessen Größe gegenüber der des tatsächlichen Suchraums drastisch reduziert ist. Die Größe des virtuellen Suchraums kann aus den beobachtenen Laufzeitverteilungen leicht bestimmt werden und ist ein Maß für die Effizienz des entsprechenden SLS-Verfahrens. Diese neue Interpretation des Verhaltens von SLS-Algorithmen wirft die Frage auf, inwieweit strukturelle Eigenschaften des tatsächlichen Suchraums existieren, die eine direkte Korrespondenz zu dem hier postulierten virtuellen Suchraum aufweisen. Eine solche Korrespondenz konnte leider bislang nicht hergestellt werden; eng verwandte Fragen der Suchraumanalyse werden jedoch in Kapitel 6 dieser Arbeit näher untersucht.

Aufbauend auf den zuvor erzielten theoretischen und empirischen Resultaten, werden im letzten Teil dieses Kapitels verschiedene Strategien zur Verbesserung des Verhaltens von

SLS-Verfahren entwickelt. Zunächst führen wir die „Random Walk"-Erweiterung, eine generelle Methode zur Beseitigung der für einige Algorithmen nachgewiesenen essentiellen Unvollständigkeit, ein. Wir entwickeln diese Erweiterung im Rahmen des GLSM-Modells; auf diese Weise kann die approximative Vollständigkeit (PAC-Eigenschaft) der entsprechend erweiterten Algorithmen leicht nachgewiesen werden. Theoretisch kann die PAC-Eigenschaft auch durch Verwendung des „Random Restart"-Mechanismus erreicht werden. In der Praxis ist jedoch die optimale Anzahl von Suchschritten vor der Reinitialisierung der lokalen Suche („cutoff parameter") üblicherweise unbekannt. Ungünstige Einstellungen dieses Parameters führen jedoch zu einem extremen Leistungsabfall des Algorithmus; in dieser Hinsicht zeigt die „Random Walk"-Erweiterung ein deutlich günstigeres Verhalten. Um deren Effektivität zu zeigen, weisen wir empirisch nach, daß die entsprechend modifizierten Varianten von R-Novelty und Novelty verglichen zu den ursprünglichen Algorithmen eine deutlich überlegene Leistung aufweisen. Nach unserem besten Wissen sind diese neuentwickelten Varianten von R-Novelty und Novelty die derzeit leistungsfähigsten SLS-Algorithmen für SAT. Es ist jedoch zu bedenken, daß für bestimmte Problemklassen, wie etwas das Allintervallreihenproblem, mithilfe aktueller systematischer Algorithmen (wie etwas Satz oder Satz-Rand) generell bessere Ergebnisse als für sämtliche uns bekannten SLS-Algorithmen zu erzielen sind.

Kapitel 6: Suchraumanalyse

Stochastisch-lokale Suchalgorithmen gehören zu den leistungsstärksten Verfahren zur Lösung schwieriger kombinatorischer Probleme wie SAT und CSP. Die Weiterentwicklung dieser Algorithmen sowie ein verbessertes Verständnis der leistungsbestimmenden Faktoren sind daher von großem Interesse. Das Verhalten von SLS-Algorithmen wird im wesentlichen von strukturellen Aspekten der zugrundliegenden Suchräume bestimmt. Die Zusammenhänge zwischen Suchraumstruktur und SLS-Verhalten sind für das SAT-Problem jedoch erst in jüngerer Zeit eingehender untersucht worden. Die Hauptmotivation liegt dabei in der Annahme, daß die hier zu gewinnenden Erkenntnisse letztendlich sowohl zur Verbesserung der SLS-Algorithmen als auch zur Entwicklung besserer SAT- bzw. CSP-Kodierungen von Anwendungsproblemen genutzt werden können. Weiterhin können entsprechende Resultate auch zur vergleichenden Analyse von SAT-Algorithmen und Kodierungsstrategien verwendet werden.

In diesem Kapitel werden verschiedene Aspekte der Suchraumstruktur und ihre Korrelation mit dem von SLS-Verfahren benötigten Lösungsaufwand untersucht. Unsere Analyse des Zusammenhangs zwischen der Anzahl von Lösungen und dem mittleren Suchaufwand für GWSAT auf Testmengen von Random-3-SAT-Instanzen bestätigt die in einer früheren Studie festgestellte starke negative Korrelation. Unsere Untersuchung zeigt jedoch, daß die Korrelationsstärke mit wachsender Klausanzahl (bei gleicher Problemgröße) abnimmt; dies bedeutet, daß bei gleicher Lösungsanzahl die Variabilität des Lösungsaufwands mit zunehmender Klausanzahl ansteigt. Gleichzeitig konnten wir zeigen, daß der Einfluß der Lösungsanzahl auf den Lösungsaufwand am Phasenübergang maximal ist.

Um von dem starken Einfluß der Lösungsanzahl auf den Suchaufwand zu abstrahieren, werden für die weiteren Untersuchungen überwiegend Mengen oder Paare von Instanzen mit einer identischen oder sehr ähnlichen Anzahl von Lösungen verwendet. Die Analyse der Schwierigkeitsverteilungen (für GWSAT) von derartigen Random-3-SAT-Teilmengen (Strata) zeigt, daß der Lösungsaufwand auch bei identischer Lösungsanzahl noch eine extrem hohe Varianz aufweist. Aufgrund von Untersuchungen an Strata, die ausschließlich aus Instanzen mit nur einer Lösung bestehen, läßt sich schlußfolgern, daß die Verteilung der Lösungen im Suchraum für Random-3-SAT keine ausgeprägte Rolle spielt. Folglich müssen andere Aspekte der Suchraumstruktur für die beobachtete starke Variabilität innerhalb der Strata verantwortlich sein.

In diesem Zusammenhang werden im folgenden die Standardabweichung der Zielfunktion (die bei SAT durch die Anzahl der unerfüllten Klauseln gegeben ist) über dem gesamten Suchraum bzw. der Verzweigungsfaktor für lokale Minima entlang von GWSAT-Trajektorien untersucht. Diese Maße werden hier erstmals zur Suchraumanalyse eingesetzt. Intuitiv gesprochen ist eine hohe Variabilität in der Zielfunktion ein Indikator für eine zerklüftete Suchraumstruktur, in der gradientenabstiegsbasierte SLS-Verfahren effizienter arbeiten als in uniformen, unstrukturierten Suchräumen mit vielen Plateaus. Diese Intuition wird durch die entsprechenden empirischen Ergebnisse für Graphfärbe- und „Blocks World"-Planungsprobleme bestätigt; für Random-3-SAT und das Allintervallproblem konnte die entsprechende Korrelation dagegen nicht beobachtet werden.

Aus einer früheren Studie ist bekannt, daß die Anzahl der lokal-minimalen Zustände einen starken Einfluß auf den Lösungsaufwand hat. Hier wird dieses Resultat durch eine Untersuchung zur Struktur lokal-minimaler Suchraumregionen erweitert. Überaschenderweise stellt sich heraus, daß diese lokal-minimalen Regionen eine sehr schwach verzweigte Struktur aufweisen, sodaß jeder lokal-minimale Zustand nur eine geringe Anzahl von Nachbarn auf dem gleichen Zielfunktionsniveau hat. Plateauregionen ähneln daher weniger kompakten Basins, als Systemen schmaler, vielfach schwach verzweigter Canyons. Aufgrund dieser Struktur sollte ein Entkommen aus lokalen Minima unter Verwendung von Techniken wie etwa „Random Walk" innerhalb weniger Suchschritte möglich sein.

Für Graphfärbe- und „Blocks World"-Planungsprobleme läßt sich eine positive Korrelation zwischen der durchschnittlichen Verzweigung lokal-minimaler Zustände und dem mittleren Lösungsaufwand nachweisen. Dies stimmt mit der Anschauung überein, daß stärker verzweigte Strukturen größere Schwierigkeiten für SLS-Verfahren verursachen, da diese nichtdeterministische Zyklen in der Suche begünstigen und eine geringere Anzahl direkter Fluchtrouten aus lokalen Minima erlauben. Die entsprechenden Ergebnisse für Random-3-SAT und das Allintervallreihenproblem bestätigen diese Intuition allerdings nicht; dies ist ein Hinweis auf die Existenz weiterer Suchraumstrukturen, welche einen erheblichen Einfluß auf das Verhalten von SLS-Verfahren haben.

Insgesamt haben wir eine Reihe von Suchraumeigenschaften identifiziert und analysiert, die die Performanz von SLS-Algorithmen für SAT beeinflussen. Einige dieser Eigenschaften, wie etwa die Verzweigung lokal-minimaler Zustände, lassen deutliche Unterschiede zwischen

Random-3-SAT und SAT-kodierten Instanzen aus anderen Problemklassen erkennen. Unsere Ergebnisse können jedoch nicht alle beobachteten Unterschiede im Lösungsaufwand innerhalb von und zwischen verschiedenen Problemklassen schlüssig erklären. Es ist daher anzunehmen, daß weitere, bislang unbekannte den Suchaufwand beeinflussende Faktoren existieren.

Schlußbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Aspekte stochastisch-lokaler Suchverfahren, einem algorithmischen Paradigma, das in jüngster Zeit sowohl in der Intellektik als auch im „Operations Research“ auf großes Interesse stößt, eingehend untersucht. Wir konzentrierten uns dabei auf die Modellierung von SLS-Verfahren, die empirische Analyse ihrer Leistung, die Charakterisierung und Verbesserung ihres Verhaltens sowie die Untersuchung der leistungsbestimmenden Faktoren. Hierbei diente das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem (SAT) als Anwendungs- und Analysedomäne; diese Problemklasse bietet den Vorteil konzeptueller Einfachheit, was Entwurf, Implementierung und Darstellung von Algorithmen ebenso wie deren Analyse begünstigt. Der überwiegende Teil der hier entwickelten und verwendeten Methodik läßt sich jedoch problemlos auf andere kombinatorische Probleme, wie beispielsweise CSP, übertragen.

Viele der in dieser Arbeit geleisteten Beiträge, Methoden wie empirische und theoretische Resultate, sind, für sich alleine genommen, bereits interessant und aufschlußreich. Sie werfen jedoch gleichzeitig neue Fragen auf, lassen einige offene Probleme in einem etwas anderen Licht erscheinen und und bieten Ansatzpunkte für weitere Forschungsarbeiten. Im folgenden werden einige dieser Aspekte kurz angesprochen.

- Unsere empirische Untersuchung von SLS-Verfahren für SAT waren überwiegend auf Algorithmen beschränkt, die als einfache Instanzen des GLSM-Modells dargestellt werden können. Viele der komplexeren Eigenschaften und Erweiterungen des GLSM-Modells wurden in diesem Zusammenhang nicht benötigt; deren potentieller Nutzen für SAT und andere Problemklassen sollte eingehender untersucht werden. Ausgehend von den hier erzielten Resultaten erscheinen hierbei heterogene kooperatibe Modelle, möglicherweise unter Einbeziehung von Lernmechanismen und Evolutionsstrategien, als besonders attraktiv.

- Wir haben gezeigt, wie das GLSM-Modell dazu benutzt werden kann, einige der leistungsstärksten derzeit bekannten SLS-Algorithmen für SAT weiter zu verbessern. Die entsprechenden GLSMs sind jedoch noch immer vergleichsweise einfach; eine interessante Frage ist daher, inwieweit sich durch komplexere Kombinationen einfacher Suchstrategien weitere Leistungssteigerungen oder höhere Robustheit erzielen lassen. Weitere Untersuchungen zu dieser Frage sollten sich vermutlich nicht ausschließlich auf kombinatorische Entscheidungsproblem wie SAT konzentrieren, sondern auch klassische Optimierungsprobleme, wie etwas das Handlungsreisendenproblem (TSP) oder Scheduling-Probleme,

miteinbeziehen.

- Während wir die approximative Vollständigkeit von GWSAT sowie die essentielle Unvollständigkeit für WalkSAT+tabu, Novelty und R-Novelty nachweisen konnten, bleibt die Frage nach der approximativen Vollständigkeit von WalkSAT weiterhin offen. Unsere empirischen Resultate geben keinerlei Hinweis auf eine mögliche essentielle Unvollständigkeit von WalkSAT; daher vermuten wir, daß WalkSAT approximativ vollständig ist. Weiterhin haben wir die essentielle Unvollständigkeit von GSAT und GSAT+tabu nicht nachgewiesen; wir gehen jedoch davon aus, daß die entsprechenden Beweise nicht besonders schwierig sind. Wie wir in Kapitel 4 und 5 gezeigt haben, führt essentielle Unvollständigkeit in der Praxis zu starken Leistungseinbußen und mangelnder Robustheit von SLS-Algorithmen. Aus diesem Grunde sollten approximative Vollständigkeit und die Vermeidung von Stagnationsverhalten als wichtige Entwurfsprinzipien bei der Neu- und Weiterentwicklung von SLS-Algorithmen angesehen werden.

- Wir haben funktionale Charakterisierungen des Laufzeitverhaltens für eine Reihe von SLS-Algorithmen für SAT bei Verwendung von optimalen und höheren Walkparametereinstellungen und Tabulistenlängen entwickelt. Da das gleiche EPAC-Verhalten für alle hier untersuchten Algorithmen und schwierigen Probleminstanzen nachgewiesen werden konnte, vermuten wir, daß dieses Verhalten charakteristisch für SLS-Verfahren bei der Lösung schwieriger kombinatorischer Probleme ist. Diese Hypothese wird durch weitergehende Untersuchungen zum Laufzeitverhalten von SLS-basierten CSP-Algorithmen gestützt. Das Verhalten von SLS-Verfahren für niedrige Walkparametereinstellungen und Tabulistenlängen wurde in dieser Arbeit nicht exakt modelliert; wir gehen jedoch davon aus, daß die entsprechenden Laufzeitverteilungen durch Linearkombinationen der in Kapitel 5 entwickelten verallgemeinerten Exponentialverteilungsfamilie approximiert werden können.

- Wie in Kapitel 5 erörtert, legt das beobachte EPAC-Verhalten eine neue Interpretation des Verhaltens von SLS-Algorithmen als zufälliges Herumstochern in einem reduzierten virtuellen Suchraum nahe. Die Größe dieses virtuellen Suchraums korreliert mit dem mittleren Lösungsaufwand für die entsprechende Probleminstanz. In Kapitel 6 konnten einige Suchraumeigenschaften nachgewiesen werden, die zu einem gewissen Grade mit dem Lösungsaufwand korrelieren; es konnte jedoch keine direkte Entsprechung zu dem postulierten virtuellen Suchraum gefunden werden. Unserer Meinung nach zählt der Versuch, ausgehend von den hier entwickelten einfachen mathematischen Modellen, Erklärungen für das beobachte Verhalten von SLS-Algorithmen zu finden, zu den lohnendsten und aussichtsreichsten Ansatzpunkten für weiterführende Forschungsarbeiten.

- Im Zusammenhang mit unseren Untersuchungen zur Suchraumstruktur und deren Einfluß auf das Verhalten von SLS-Verfahren bleiben viele Fragen einstweilen unbeantwortet. Unsere Resultate weisen darauf hin, daß von den hier untersuchten Eigenschaften verschiedene Aspekte der Suchraumstruktur eine wichtige Rolle spielen; weiterführen-

de Untersuchungen sollten diese identifizieren und charakterisieren. Ein weiterer, sehr wichtiger Aspekt, der in dieser Arbeit nicht behandelt werden konnte, ist der Einfluß von Kodierungsstrategien auf die Suchraumstruktur und damit das Verhalten von SLS-Verfahren. Wir sind der Überzeugung, daß weitere Einsichten in diese Zusammenhänge eine wichtige Grundlage für die Weiterentwicklung der existierenden SLS-Verfahren darstellen und weiteren Aufschluß über den generellen Nutzen des in Kapitel 1 diskutierten generischen Problemlöseansatzes geben werden.

- Wir sind davon überzeugt, daß der überwiegende Teil der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Methoden ebenso zur Untersuchung von SLS-basierten Optimierungsalgorithmen eingesetzt werden kann. Die hierzu benötigten Erweiterungen sind teilweise bereits eingeführt worden (siehe Kapitel 2); folglich sollte die Durchführung von entsprechenden Untersuchungen (analog zu den hier für SAT vorgestellen) für Optimierungsprobleme wie MAXSAT oder MAXCSP nicht schwierig sein. Da SLS-Verfahren für Entscheidungsprobleme wie SAT inhärent auf der Lösung des entsprechenden Optimierungsproblems (hier: MAXSAT) basieren, ist davon auszugehen, daß durch weitere Arbeiten in diesem Bereich aufschlußreiche Erkenntnisse bezüglich des Verhaltens von SLS-Algorithmen im allgemeinen zu erzielen sind.

Aufbauend auf vorhergehenden Arbeiten über stochastisch-lokale Suchverfahren, verfolgte diese Arbeit das Ziel, das generelle Verständnis von SLS-Algorithmen und deren Verhalten zu erweitern, ihre Leistungsfähigkeit eingehend zu untersuchen und existierende Algorithmen zu verbessern. Während dieses Ziel — so hoffen wir — in mancherlei Hinsicht erreicht wurde, bleiben viele grundlegende Fragen zum Verhalten und zur praktischen Einsetzbarkeit von SLS-Algorithmen offen. Besonders wichtig ist dabei unserer Meinung nach die Frage nach einer umfassenden Charakterisierung der leistungsbestimmenden Faktoren sowie die generelle Bewertung der Rolle von SLS-Algorithmen im Rahmen des in Kapitel 1 diskutierten generischen Problemlöseansatzes. Obgleich wir diese Fragen derzeit nicht beantworten können, so hoffen wir dennoch, daß die Resultate dieser Arbeit als ein weiterer Schritt auf dem Weg zur befriedigenden Lösung dieser Probleme angesehen werden können und sich als nützliche Grundlagen für weiterführende Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet erweisen werden.